TALU TRANSPORDIKESKUSE OPTIMAALNE ASEND

M. Heinloo

Talu transporditööde mahu ja kulutuste vähendamiseks on vaja paigutada selle transpordikeskus punkti, mille suhtes transpordi keskmine läbitud teepikkus omandab minimaalse väärtuse. H. Möller jt. (1997) leiavad, et ringikujulise talu transpordikeskus peab asuma ringi keskpunktis. Käesolevas töös püütakse leida suvalise kujuga talule sellised veokeskuse koordinaadid, mis minimeerivad keskmise läbitud teepikkuse.

1. Ülesande seade

Vaatleme mis tahes kujuga talu G. Olgu $A(x,y)$ talu G suvaline punkt ja $C(k,h)$ selle talu transpordikeskus. Olgu x, y ja k, h koordinaadid fikseeritud täisnurkses koordinaatsüsteemis. Talu G transpordi keskmiseks läbitud teepikkuseks transporditöödel nimetame suurust

$$d(k,h) = \frac{1}{S}\iint_G s(x,y,k,h)dG\,, \tag{1}$$

kus

$$S = \iint_G dG \tag{2}$$

on talu G pindala ja $s(x,y,k,h) = \rho(x,y,k,h)r(x,y,k,h)$ – tee pikkus punktist $C(k,h)$ punkti $A(x,y)$ ja tagasi. Siin $\rho(x,y,k,h)$ on kaalufunktsioon ja

$$r(x,y,k,h) = \sqrt{(x-k)^2 + (y-h)^2}$$

samade punktide vaheline kaugus. Funktsioon $\rho(x,y,k,h)$ peab sisaldama informatsiooni nii talu teeolude kui ka transporditava materjali jaotuse kohta talu territooriumil. Konkreetse talu andmetel saab sellise funktsiooni ehitada kahe muutuja interpolatsioonipolünoomina (Levin, Ulm, 1977).

Püstitame ülesande. **Leida talu transpordikeskuse $C(k,h)$ koordinaatidele k ja h sellised väärtused, mille korral funktsionaal (1) omandab minimaalse väärtuse.**

Oletame, et kaalufunktsioon on kirjeldatav kujus $\rho(x,y)$. Selgus, et sellel juhul saab püstitatud ülesande lahendi avaldada järgmiselt:

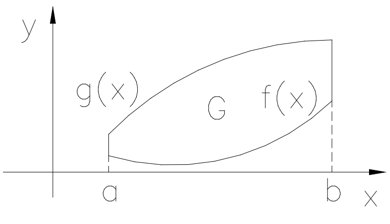
$$k = \frac{1}{\sigma}\iint_G x\rho(x,y)dG\,, \quad h = \frac{1}{\sigma}\iint_G y\rho(x,y)dG\,, \tag{3}$$

kus

$$\sigma = \iint_G \rho(x,y)dG\,. \tag{4}$$

Kui $\rho(x,y)$ on tasapinnalise mittehomogeense plaadi tihedusfunktsioon, siis valemite (3) ning (4) abil arvutatud suurused k, h ja σ on vastavalt selle plaadi massikeskme koordinaadid ja mass (Butenin jt., 1983).

2. Kõvertrapetsi kujulisele talule transpordikeskuse optimaalse asendi määramine



Joonis 1. Kõvertrapets
Figure 1. *Region of integration*

Olgu talu poolt hõivatud piirkonnaks G kõvertrapets (joon. 1), mis on piiratud joontega $f(x)$ ja $g(x)$ ning sirgetega $x = a$ ja $x = b$. Valemid (1) – (4) saab joonisel näidatud piirkonna jaoks esitada kujul

$$d(k,h) = \frac{1}{S}\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \rho(x,y,k,h)\sqrt{(x-k)^2 + (y-k)^2}\,dydx\,, \tag{5}$$

$$S = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} dy dx \tag{6}$$

$$k = \frac{1}{\sigma} \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} x\rho(x,y) dy dx\ , \quad h = \frac{1}{\sigma} \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} y\rho(x,y) dy dx \tag{7}$$

$$\sigma = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \rho(x,y) dy dx \tag{8}$$

Oletame, et kaalufunktsioon sõltub vaid talu suvalise punkti $A(x,y)$ ja transpordikeskuse $C(k,h)$ vahelisest kaugusest r, s.t. kaalufunktsioon on kujul $\rho = \rho(r)$. Konkreetselt võtame

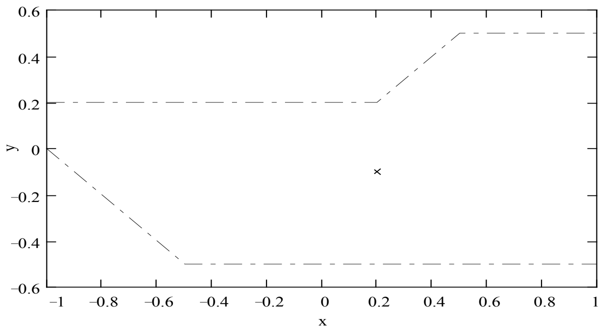
$$\rho(x,y,k,h) = 2 + \sqrt{(x-k)^2 + (y-h)^2}\ . \tag{9}$$

Olgu talu G määratud kõvertrapetsiga $x = -1$, $x = 1$,

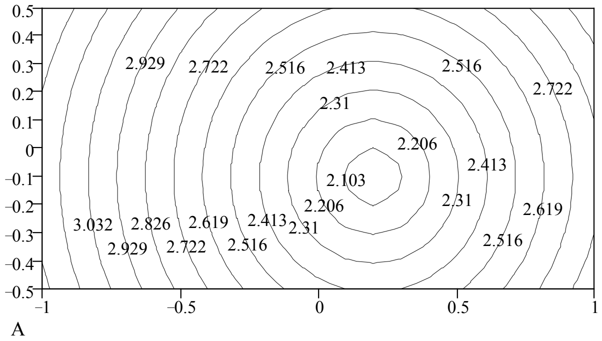
$$f(x) = -1 - x,\ kui\ \ -1 \le x \le -0{,}5\ \ ja\ f(x) = -0{,}5\ kui\ \ -0{,}5 < x \le 1, \tag{10}$$

$$g(x) = 0{,}2,\ kui\ -1 \le x \le 0{,}2,\ g(x) = x,\ kui\ \ 0{,}2 < x \le 0{,}5\ \ ja\ g(x) = 0{,}5,\ kui\ \ 0{,}5 < x \le 1\,. \tag{11}$$

Tingimustega x = –1, x = 1, (10), (11) määratud talu G (kõvertrapets) on näidatud joonistel 2, 4, 6, kus talu ülemine ja alumine piir on tähistatud punktkriipsjoonega.

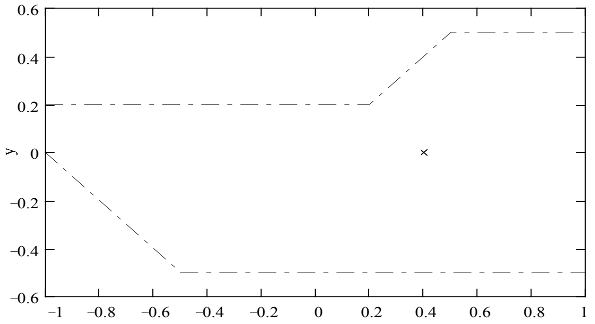


Joonis 2. Talu transpordikeskuse optimaalne asend kaalufunktsiooni (9) korral
Figure 2. *The optimal location of the farm's transport centre in the case of weight function (9)*

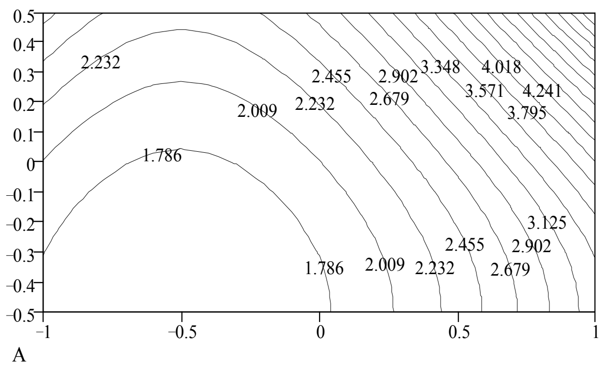


Joonis 3. Kaalufunktsiooni (9) tasemejooned
Figure 3. *Contours of the weight function (9)*

Olgu pikkuste mõõtühikuks võetud kilomeeter (km). Arvutused valemite (5) – (11) järgi näitavad, et talu transpordikeskus tuleb paigutada joonisel 2 ristiga tähistatud punkti, mille koordinaadid on k = 0,20 km ja h = 0,10 km. Nende koordinaatide korral saab keskmine teepikkus minimaalse väärtuse 1,447 km. Võrdusega (9) määratud pinna tasemejooned optimaalse transporditsentri korral on näha joonisel (3).



Joonis 4. Talu transpordikeskuse optimaalne asend kaalufunktsiooni (12) korral
Figure 4. *Optimal location of the farm's transport centre in the case of the weight function (12)*



Joonis 5. Kaalufunktsiooni (12) tasemejooned
Figure 5. *Contours of the weight function (12)*

Oletame nüüd, et kaalufunktsioon sõltub vaid talu punktide koordinaatidest. Konkreetselt võtame

$$\rho(x, y) = 2 + x + y + xy + x^2 + y^2 + xy^2 + x^2y + x^2y^2 . \quad (12)$$

Arvutused näitavad, et kaalufunktsiooni (12) korral tuleb talu transpordikeskus paigutada joonisel (4) ristiga tähistatud punkti, mille koordinaadid on k = 0,40 km ja h = 0 km. Nende koordinaatide korral saab keskmine teepikkus minimaalse väärtuse 1,343 km. Võrdusega (12) määratud pinna tasemejooned optimaalse transporditsentri korral on näha joonisel (5).

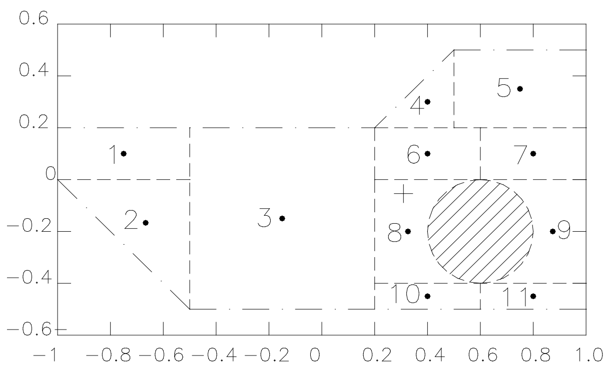
Olgu nüüd $\rho(x, y) \equiv 2$. (Sellel juhul teepikkus talu transpordikeskusest $C(k,h)$ talu suvalisse punkti $A(x,y)$ ja tagasi on võrdne nende punktide vahelise kahekordse kaugusega.) Arvutuste järgi peab talu transpordikeskuse optimaalne asend olema samuti joonisel 2 ristiga näidatud punktis, kuid minimaalne teepikkus on nüüd 1,087 km.

Kui kaalufunktsioon on konstantne või piirkonniti konstantne, siis saab kasutada ka nn. tükeldamismeetodit, nii nagu seda kasutatakse massikeskme arvutamisel teoreetilises mehaanikas. Transpordikeskuse koordinaatide ja minimaalse keskmise teepikkuse leidmiseks jaotame joonisel 2 näidatud talu 12 piirkonnaks (joon. 6), millest viirutatud piirkond ei ole transpordivahenditele läbitav. Seejärel leiame igale piirkonnale vastavad suurused ja koondame tulemused tabelisse 1.

Tabel 1. Piirkondade parameetrid
Table 1. *Parametres of the regions*

i	k_i(km)	h_i(km)	d_i(km)	ρ_i	S_i(km^2)
1	–0,750	0,100	0,283	3,0	0,100
2	–0,667	–0,167	0,301	3,5	0,125
3	–0,150	–0,150	0,536	2,0	0,490
4	0,400	0,300	0,181	3,0	0,045
5	0,750	0,350	0,312	4,0	0,150
6	0,400	0,100	0,237	3,0	0,080
7	0,800	0,100	0,237	4,0	0,080
8	0,326	–0,200	0,269	2,5	0,097
9	0,874	–0,200	0,269	6,0	0,097
10	0,400	–0,450	0,212	3,0	0,040
11	0,800	–0,450	0,212	4,0	0,040

Tabelis 1 on kasutatud järgmisi tähistusi: i – talu piirkonna number; k_i ja h_i – piirkonna transpordikeskuse x- ja y-koordinaadid; d_i – keskmine teepikkus piirkonnas; S_i – piirkonna pindala; ρ_i – kaalufunktsiooni (kaaluteguri) väärtus piirkonnas.



Joonis 6. Lokaalsed ja kogu talu transpordikeskuste optimaalsed asendid
Figure 6. *Local and whole farm optimal transport centres*

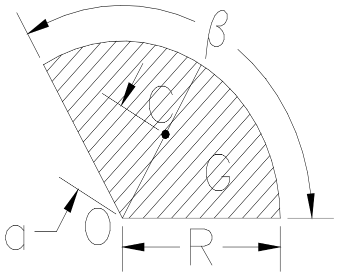
Vaadeldava talu transpordikeskuse optimaalse x-koordinaadi K, y-koordinaadi H ja minimaalse teepikkuse D leiame järgmistest valemitest:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{11} \rho_i k_i S_i}{\sum_{i=1}^{11} \rho_i S_i}, \quad H = \frac{\sum_{i=1}^{11} \rho_i h_i S_i}{\sum_{i=1}^{11} \rho_i S_i}, \quad D = \frac{\sum_{i=1}^{11} \rho_i d_i S_i}{\sum_{i=1}^{11} S_i}, \quad (13)$$

Asendades tabelis 1 näidatud arvud valemitesse (13), saame: $K = 0{,}309$, $H = –0{,}054$, $D = 1{,}031$. Joonisel 6 on näidatud piirkondade lokaalsete transpordikeskuste (punktid) ja kogu talu (rist) transpordikeskuse optimaalsed asendid.

3. Ringi sektori kujulise talu optimaalne transpordikeskuse asendi määramine

Oletame, et talu poolt hõivatud piirkonnaks on ringi sektor G (joon. 7). Möller jt. (1997), uurisid keskmise veokauguse (poole teepikkuse) sõltuvust transpordikeskuse C kaugusest ringi keskpunktist juhul kui $\beta = 360^{o}$ (ringikujuline talu). Levini ja Ulmi (1997) arvutustest järeldub, et keskmine veokaugus omandab minimaalse väärtuse, kui ringikujulise talu transpordikeskus paigutada ringi keskpunkti. Paigutades polaarkoordinaatide süsteemi alguse transpordikeskusesse C, saadakse Mölleri jt. (1997) töös analüütiline avaldis ringikujulise talu keskmise veokauguse arvutamiseks elliptiliste integraalide kaudu. Ringi sektori kujulise talu korral on arvutuste seisukohalt mugavam paigutada polaarkoordinaatide süsteemi algus ringi keskpunkti O. Sellise koordinaatide valiku korral on otstarbekas kasutada dimensioonita suurusi



Joonis 7. Ringi sektori kujuline talu
Figure 7. *Farm of circle sector form*

$$r = \frac{\rho}{R}, \quad k = \frac{a}{R}, \quad d = \frac{d^*}{R}, \tag{14}$$

kus ρ ja a on vastavalt ringi sektori suvalise punkti ja transpordikeskuse C polaarraadiused ja d^* – keskmine läbitud teepikkus. Kui $\rho(x, y) \equiv 2$, siis dimensioonita suurustes (4.1) saab valemi (3.1) esitada kujul

$$d(\beta, k) = \frac{4}{\beta} \int_0^{\beta} \int_0^{1} \sqrt{r^2 + k^2 - 2rk\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\varphi + \sin\frac{\beta}{2}\sin\varphi\right)} r dr d\varphi . \tag{15}$$

Vastavalt käesoleva töö punktis 1 leitud analoogiale tasapinnalise plaadi massikeskme ja talu transpordikeskuse optimaalse asendi vahel võib väita, et ringi sektori kujulise talu transpordikeskuse optimaalne asend on kesknurga β poolitajal kaugusel $a = \frac{4\sin\frac{\beta}{2}}{3\beta} R$ keskpunktist O (joon. 7).

Kirjandus

Butenin N., Lunts J., Merkin D. Teoreetiline mehaanika. Staatika ja kinemaatika. – Tln., 1983. – 256 lk.

Levin M., Ulm O. Arvutusmeetodite käsiraamat. – Tln., 1977. – 320 lk.

Möller H., Soonets K., Asi M., Eerits A. Keskmisest veokaugusest põllutöödel. – EPMÜ teadustööde kogumik nr. 93, lk. 93…100, 1997.

Optimal Transport Centre of a Farm

M. Heinloo

SYMMARY: *The amount and expenses of a farm transport can be minimized, knowing the optimal location of the transport centre. This paper determines the optimal location of the transport centre for a farm, as a point relative at which the mean passed way of transport has the minimum value. Shown that the coordinates of the optimal transport centre, which minimizes the mean passed way of transport of the farm, can be determined analogously to the centre mass for planar plates. The set of examples for determination of the optimal location of a transport centre and the minimal mean passed way of transport for various shapes of the farm regions have been studied.*

Key words: *Minimization of functionals, minimal mean passed way of transport, optimal location of a transport centre of a farm.*