# KESKMISEST VEOKAUGUSEST PÕLLUTÖÖDEL VEDUDE ELLIPSIKUJULISE PIIRKONNA KORRAL

H. Möller, K. Soonets, M. Asi, R. Vettik

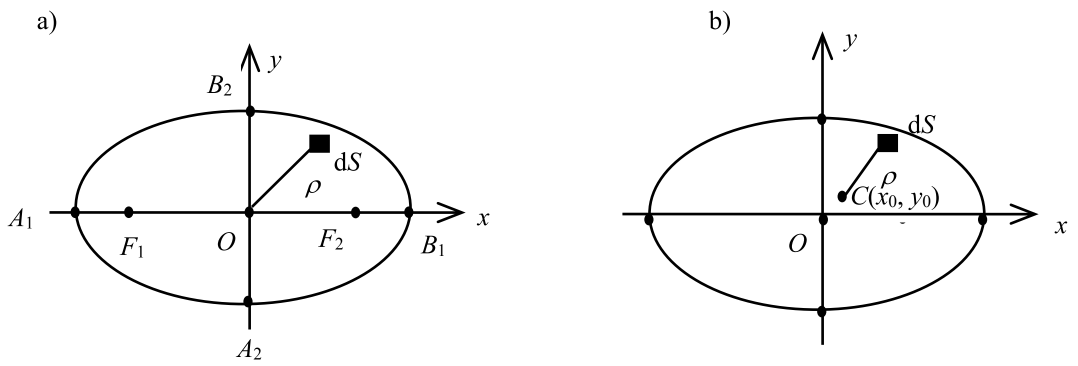
Enamiku praeguseks Eestis omaaegsetes piirides taastatud talude haritava maa pindala on väike. Tolleaegsete talude suurus oli esmajoones tingitud inimtöö ja hobutöö agregaatide madalast tootlusest. Praeguseks on aga elavveojõud asendatud mehaanilise veojõuga, mille baasil moodustatud agregaatide tootlus ja ka hind ületab olulisel määral omaaegsete hobuagregaatide tootluse ja hinna. Et tootmist odavamaks muuta, on vaja praegusi suhteliselt suure võimsusega agregaate koormata sedavõrd, s.o. harida nendega nii suurt pindala, kui seda lubavad esmajoones bioloogilised kriteeriumid. See põhjustab talude haritava maa pindala olulise kasvu, mis ühelt poolt suurendab kogusaaki ja vähendab püsikulude osakaalu toodangu omahinnas, s.o. suurendab tulu, kuid teiselt poolt põhjustab transporditööde mahu kasvu, mis omakorda suurendab kulutusi. Võib arvata, et on võimalik määrata talu haritava maa pindala optimaalne suurus, lähtudes bioloogilistest, looduslik-klimaatilistest, tehnilistest ja ökonoomilistest kriteeriumidest. Olulisteks talu tootmistulemusi mõjutavateks faktoriteks on seejuures transporditööde parameetrid.

Talus põllutöödel saab transporditööde mahtu ja kulusid prognoosida, teades vedude keskmist teoreetilist veokaugust (edaspidi veokaugust), milleks võetakse sirgjooneline veotee vedude tsentrist põllule ja tagasi, ning veokauguse pikenemise tegurit, mis arvestab kõverjoonelisi põldudevahelisi teid. Varasemates käsitlustes on enamasti talu vaadeldud ringikujulisena. Neid probleeme on käsitletud mitmetes töödes (Kask, 1977; Möller jt., 1994; Bernhardt, 1996; Möller jt., 1997). Möller jt. (1997) on põhjalikumalt vaadelnud ringikujulist piirkonda, kus vedude tsenter võib olla ringi suvalises punktis ja vedude maht ringi erinevatesse piirkondadesse võib olla erinev.

Käesolevas artiklis leitakse keskmine veokaugus ellipsikujulises talus, kusjuures vedude tsenter võib asuda ellipsi suvalises punktis.

## 1. Keskmine veokaugus, kui vedude tsentriks on ellipsi tsenter

Olgu vedude piirkonnaks ellips telgedega 2a ja 2b ning fookustevahelise kaugusega 2c (joonis 1,a), s.t. $A_1B_1 = 2a$; $A_2B_2 = 2b$; $F_1F_2 = 2c$.




**Joonis 1.** Matemaatilisi arutlusi illustreerivad skeemid
***Figure 1.*** *Illustrative schemes of mathematical discussions*

Ellipsi parameetrite vaheline seos on $b^2 = a^2 - c^2$ ja ellipsi ekstsentrilisus $e = c/a$, kus $0 \le e < 1$ ($e = 0$ puhul on tegu ringiga); ellipsi pindala $S = \pi ab$. Kui ristkoordinaadistiku nullpunkt $O$ asub ellipsi sümmeetriatelgede lõikepunktis, omab ellipsi kanooniline võrrand kuju

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,. \tag{1}$$

Tähistame ellipsi pinnaelemendi d$S$ = d$x$d$y$ kauguse tsentrist $O$ tähega $\rho$.

Olgu vedude tsentriks punkt $O$ ning vedude osatähtsus iga pinnaelemendi jaoks sama. Keskmine veokaugus $d$ on määratud valemiga

$$d=\frac{1}{S}\iint\limits_{(S)}\rho\,\mathrm{d}\,S\,. \tag{2}$$

Esitame valemis (2) sisalduva integraali ristkoordinaatides ja ellipsi sümmeetriat arvestades integreerime üle veerandi ellipsi pinna $S_1=\dfrac{S}{4}$:

$$I=\iint\limits_{(S)}\rho\,\mathrm{d}\,S=4\iint\limits_{(S_1)}\sqrt{x^2+y^2}\;\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,. \tag{3}$$

Integreerimisel kasutame muutuja vahetust nn. elliptiliste polaarkoordinaatide näol

$$\begin{aligned} x&=ar\cos\varphi,\\ y&=br\sin\varphi, \end{aligned} \tag{4}$$

kus $r$ on dimensioonita suurus ning tehtava asenduse jakobiaan on J = $abr$. Integraal (3) esitub kujul

$$I=4a^2b\iint\limits_{D}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,r^2\;\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi\,. \tag{5}$$

Integreerimispiirkond $D$ on määratud tingimustega $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$ ja $0\le r\le r(\varphi)$, kus $r$ = $r(\varphi)$ on ellipsi kui joone punktidele vastav $r$ väärtus. Sõltuvuse $r$ = $r(\varphi)$ saame ellipsi võrrandist (1) valemeid (4) kasutades. Selgub, et $r(\varphi)$ = 1 = const. Integraali $I$ leidmine taandub kahele järjestikusele integreerimisele

$$I=4a^2b\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}\,r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\;\mathrm{d}\,\varphi=\frac{4}{3}a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\;\mathrm{d}\,\varphi\,.$$

Siin on tegemist 2. liiki elliptilise integraaliga $E(e)$, mille väärtuse saab leida elliptiliste integraalide tabelist sõltuvalt $e$ väärtustest.

Keskmise veokauguse (2) leidmine toimub seega järgmiselt:

$$d=\frac{4}{3\pi}E(e)a\approx 0{,}4244E(e)a\,. \tag{5}$$

Avaldame keskmise veokauguse pikema pooltelje osades (suhtelised veokaugused)

$$\frac{d}{a}=\frac{4}{3\pi}E(e)\approx 0{,}4244E(e)\,. \tag{6}$$

Järgnevalt on toodud keskmised suhtelised veokaugused sõltuvalt ellipsi ekstsentrilisusest

| $e$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d/a$ | 0,6667 | 0,6648 | 0,6600 | 0,6513 | 0,6391 | 0,6228 | 0,6018 | 0,5754 |

| 0,8 | 0,9 | 0,95 |
|---|---|---|
| 0,5423 | 0,4971 | 0,4686 |

Ringikujulise piirkonna korral raadiusega $R$ on $d/R$ = 0,6667 [5], mis langeb kokku ellipsi jaoks saaduga, kui $e = 0$ ja $a = b = R$.

## 2. Keskmine veokaugus vedude suvalise tsentri korral

Vaatleme üldjuhtu, kus vedude tsenter võib asuda ellipsi suvalises punktis $C(x_0, y_0)$ (joon. 1,b). Ellipsi sümmeetriat arvestades võime lugeda punkti $C$ asuvaks ellipsi ühes, näiteks esimeses veerandis. Siis avaldub otsitav integraal (3) kujul

$$I = \iint_{(S)} \rho \,\mathrm{d}\, S = \iint_{(S)} \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2}\,\mathrm{d}\, x\,\mathrm{d}\, y\,. \tag{7}$$

Otstarbekas on punkti $C$ koordinaadid avaldada ellipsi pooltelgede osades järgmiselt:

$$x_0 = \alpha \cdot a,\;\; y_0 = \beta \cdot b,\;\; kus\; 0 \le \alpha \le 1,\;\; 0 \le \beta \le 1\,.$$

Integreerimisel kasutame muutuja vahetust

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ar\cos\varphi = a\left(\alpha + r\cos\varphi\right), \\ y &= y_0 + br\sin\varphi = b\left(\beta + r\sin\varphi\right), \end{aligned} \tag{8}$$

mille jakobiaan on J = $a\,b\,r$.
Uute muutujate $\varphi$ ja $r$ muutumispiirkond on järgmine: nurk $0 \le \varphi \le 2\pi$ ; polaarraadius $0 \le r \le r(\varphi)$, kus $r(\varphi)$ on ellipsi rajajoone punktidele vastav $r$ väärtus. Seose $r = r(\varphi)$ saame valemitega (8) määratud muutujate $x$ ja $y$ asendamisel ellipsi võrrandisse (1) kujul

$$r(\varphi) = \sqrt{\left(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi\right)^2 + 1 - \alpha^2 - \beta^2} - \left(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi\right). \tag{9}$$

Integraal (7) teisendub kujule

$$I = a^2 b\int_0^{2\pi}\sqrt{1 - e^2\sin\;\varphi}\,\mathrm{d}\,\varphi\int_0^{r(\varphi)} r^2\,\mathrm{d}\,r = \frac{a^2 b}{3}\int_0^{2\pi}\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\,r^3(\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi\,. \tag{10}$$

Valemis (10) tuleb veel $r(\varphi)$ asendada valemist (9) ning tekkiv integraal on kolme parameetri $e$, $\alpha$, $\beta$ funktsioon $L(e, \alpha, \beta)$, mis avaldub kujul

$$L(e, \alpha, \beta) = \int_0^{2\pi}\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\;r^3(\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi\,. \tag{11}$$

Andes ette ellipsi poolteljed $a$ ja $b$ ning vedude tsentri koordinaadid $C(x_0, y_0)$, saame leida ekstsentrilisuse $e$ ja parameetrid $\alpha$ ning $\beta$. Integraali (11) leiame numbriliselt arvutil, kasutades mõnd numbrilise integreerimise algoritmi.

Veokaugus ja veokaugus ellipsi pikema pooltelje osades avaldub kujul

$$d = \frac{a}{2\pi} L(e,\alpha,\beta); \quad \frac{d}{a} \approx 0{,}1061 L(e,\alpha,\beta)\,. \tag{12}$$

Alljärgnevalt esitame mõningaid arvutustulemusi.

$e = 0{,}5$

| $\alpha\backslash\beta$ | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,6228 | 0,6488 | 0,7254 | 0,8489 | 1,0117 |
| 0,25 | 0,6550 | 0,6791 | 0,7504 | 0,8655 | 1,0175 |
| 0,5 | 0,7500 | 0,7688 | 0,8244 | 0,9145 | 1,0346 |
| 0,75 | 0,9026 | 0,9130 | 0,9440 | 0,9945 | 1,0631 |
| 1 | 1,1027 | 1,1027 | 1,1027 | 1,1027 | 1,1027 |

Erijuhud:

1) piirkond on ring, vedude tsenter on ringi tsentris; siis $e = \alpha = \beta = 0$ ning $d/R = 0{,}6667$;
2) piirkond on ring, vedude tsenter on ringi serval; siis $e = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$ ning $d/R = 1{,}1318$.

Saadud tulemused ühtivad Mölleri jt. (1997) saadutega.

## Kirjandus


Bernhardt F. Überlegungen zur optimalen Größe von Produktionseinheiten in der Milchviehhaltung. – Berichte über Landwirtschaft / Zeitschrift für Agrarpolitik und Landwirtschaft vom Bundesministerium für Ernährung, Landwirtschaft und Forsten. Band 74(3). Münster-Hiltrup, S. 481…493, 1996.

Kask H. Transpordi- ja laadimistööd põllumajanduses. – Tallinn, 1977. – 278 lk.

Möller H., Reintam A., Asi M., Tallo A. Talu üldpindala mõju kasumile põllundusest. – Eesti Põllumajandusülikooli teadustööde kogumik nr. 177. Põllumajandustehnika ja energeetika. Tartu, lk. 34…39, 1994.

Möller H., Eerits A., Soonets K. Talu pindala suuruse mõju masinapargi töötulemustele. – Akadeemilise Põllumajanduse Seltsi Toimetised 3. Tartu, lk. 114…117, 1997.

Möller K., Soonets K., Asi M., Eerits A. Keskmisest veokaugusest põllutöödel. – Eesti Põllumajandusülikooli teadustööde kogumik nr. 193. Põllumajandustehnika ja energeetika. Tartu, lk. 93…100, 1997.



*Uurimistööd, mille probleeme artikkel käsitleb, finantseerib Eesti Teadusfond.*


## Field Works Mean Transport Distance in an Ellipse-Shaped Farm Plot


H. Möller, K. Soonets, M. Asi, R. Vettik


Summary


In [5] the mean transport distance in a circular farm plot was analyzed. In the present article the mean transport distance for field works in the ellipse-shaped farm plot is studied. The equations for mean transport distance prognostication are composed considering that the farm house (transportation centre) could be located in an optional point of the ellipse.